



# Une opérade anticyclique sur les arbustes

Frédéric Chapoton

## ► To cite this version:

Frédéric Chapoton. Une opérade anticyclique sur les arbustes. Annales Mathématiques Blaise Pascal, 2010, 17 (1), p. 17-45. hal-00360920

**HAL Id: hal-00360920**

**<https://hal.science/hal-00360920>**

Submitted on 12 Feb 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Une opérade anticyclique sur les arbustes

F. Chapoton

12 février 2009

## Résumé

On définit des objets combinatoires nouveaux, les arbustes, qui généralisent les forêts d'arbres enracinés. On introduit ensuite une structure d'opérade sur les arbustes. On montre que cette opérade Arb s'injecte dans l'opérade Zinbiel, en utilisant l'inclusion de Zinbiel dans l'opérade des moules. On montre aussi que cette inclusion est compatible avec la structure plus riche d'opérade anticyclique qui existe sur Zinbiel et sur les moules.

## Abstract

We define new combinatorial objects, called shrubs, such that forests of rooted trees are shrubs. We then introduce a structure of operad on shrubs. We show that this operad is contained in the Zinbiel operad, by using the inclusion of Zinbiel in the operad of moulds. We also prove that this inclusion is compatible with the richer structure of anticyclic operad that exists on Zinbiel and on moulds.

## Introduction

Parmi les opérades classiques, on trouve l'opérade Comm des algèbres commutatives et associatives. Cette opérade s'injecte dans une opérade d'introduction plus récente, l'opérade Zinb des algèbres de Zinbiel, introduite par Loday [Lod01]. L'opérade Zinb est munie d'une structure plus riche d'opérade anticyclique [Cha05]. L'image de Comm dans Zinb n'est pas une sous-opérade anticyclique et la plus petite sous-opérade anticyclique de Zinb contenant Comm est en fait Zinb tout entière.

On peut cependant se poser la question suivante. L'opérade Comm est en fait une opérade ensembliste, *i.e.* qui existe dans la catégorie des ensembles plutôt que dans celle des espaces vectoriels. En oubliant la structure additive de Zinb, on obtient une inclusion d'opérades ensemblistes de Comm dans Zinb. Quelle est alors la plus petite opérade anticyclique ensembliste de Zinb contenant Comm ? Cet article donne la réponse à cette question, en décrivant explicitement cette opérade.

On a choisi de présenter les choses dans le sens contraire de la motivation qui vient d'être donnée. On introduit donc une opérade *a priori* ; on étudie cette opérade et on montre en particulier qu'elle s'injecte bien dans Zinb et qu'elle répond à la question posée.

L'opérade en question, qu'on notera Arb, est une opérade ensembliste, dont la combinatoire fait intervenir des objets nouveaux, qui généralisent les forêts

d'arbres enracinés. On a choisi de nommer ces objets des arbustes. La première section est consacrée à une étude combinatoire de ces objets, qui a par ailleurs fait l'objet d'une note [Cha08].

Ensuite, on introduit la structure d'opérade, et on en donne une présentation par générateurs et relations. L'opérade Arb est binaire et quadratique, ce qui signifie qu'elle est engendrée par des éléments en degré 2 et que les relations sont en degré 3.

On décrit ensuite le morphisme d'opérade de Arb dans Zinb dont l'existence résulte immédiatement de la présentation par générateurs et relations.

Pour montrer que ce morphisme est bien injectif, on va utiliser une injection de Zinb dans une opérade plus grosse, l'opérade des moules, qu'on notera Mould, et dont les éléments sont des fractions rationnelles en plusieurs variables [Cha07].

On donne une description directe du morphisme composé de Arb dans Mould en associant explicitement à chaque arbuste une fraction rationnelle en des variables indexées par ses sommets.

En utilisant alors les descriptions explicites obtenues, on montre que ces morphismes d'opérades sont injectifs.

Il reste ensuite à introduire la structure plus riche d'opérade anticyclique. On introduit pour cela des signes, et on montre que la version signée de Arb est une sous opérade anticyclique ensembliste de Zinb. Il est alors évident de voir que c'est bien la plus petite sous-opérade anticyclique ensembliste de Zinb qui contienne Comm. Ceci répond à la question posée plus haut, qui est la motivation originelle de cet article.

On termine en donnant la présentation binaire quadratique de l'opérade duale de Arb, sans l'étudier plus avant.

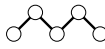

## 1 Combinatoire des arbustes

Certains aspects purement combinatoires des arbustes ont été présentés auparavant dans la note [Cha08]. Par souci de complétude, on rappelle dans cette section ceux qui seront nécessaires, ainsi que leurs démonstrations.

### 1.1 Définitions

Un **arbuste**  $P$  sur un ensemble fini  $I$  est la donnée d'un ensemble d'arêtes  $i - j$  et d'une fonction hauteur  $h_P : I \rightarrow \mathbb{N}$  satisfaisant les conditions suivantes :

1. Si  $i - j$  est une arête, alors  $h_P(i) = h_P(j) \pm 1$ .
2. Si  $h_P(j) > 0$ , alors il existe une arête  $i - j$  avec  $h_P(i) = h_P(j) - 1$ .

3. Les motifs  et  sont interdits.

Par motif interdit, on entend que le graphe induit sur un sous-ensemble de sommets n'est jamais identique à la configuration exclue, modulo un décalage éventuel de la hauteur.

**Nota Bene** : on dessine les arbustes avec la hauteur croissante de bas en haut. En particulier, ceci vaut pour les deux motifs exclus.

**Remarque** : la troncation d'un arbuste aux hauteurs plus grandes qu'une hauteur fixée est encore un arbuste, après décalage de la fonction hauteur.

Les arbres enracinés (*i.e.* les graphes connexes et simplement connexes munis d'un sommet distingué appelé la racine) sont des exemples d'arbustes, pour la

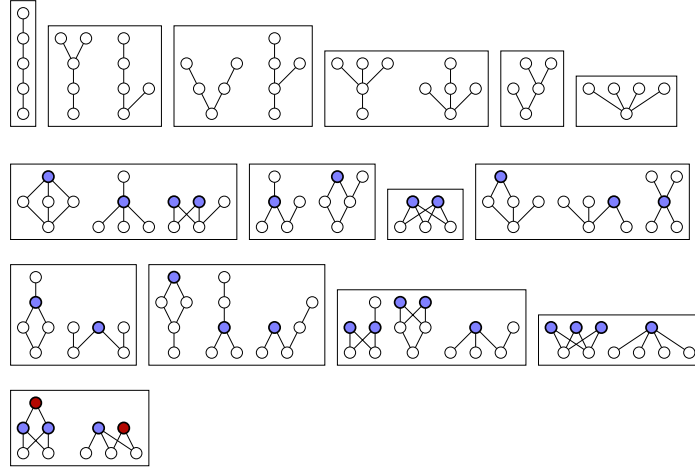


FIG. 1 – Les 30 arbustes connexes sur 5 sommets.

fonction hauteur donnée par la distance à la racine. Plus généralement, les forêts d'arbres enracinés sont aussi des arbustes, pour la même fonction hauteur.

Les graphes bipartites complets, formés d'un ensemble  $I \sqcup J$  et de toutes les arêtes possibles entre  $I$  et  $J$ , sont aussi des arbustes, en plaçant  $I$  à hauteur 0 et  $J$  à hauteur 1.

Par convention, on orientera les arêtes selon la hauteur décroissante. Si  $i - j$  est une arête avec  $h_P(i) = h_P(j) - 1$ , on dira que  $j$  couvre  $i$ , ce qu'on notera  $i \xleftarrow{P} j$  ou simplement  $i \leftarrow j$ .

Un arbuste est dit **connexe** si le graphe sous-jacent est connexe. Tout arbuste s'écrit de manière unique comme union disjointe d'arbustes connexes.

On appelle **arbuste trivial** un arbuste à un seul élément.

La figure 1 montre les 30 classes d'isomorphisme d'arbustes connexes sur 5 sommets. La signification des couleurs et des regroupements dans cette figure sera expliquée plus loin.

Un sommet  $i$  d'un arbuste  $P$  est dit **ramifié** si il est source d'au moins deux arêtes sortantes, *i.e.* si il couvre au moins deux sommets distincts. Dans la figure 1, les sommets ramifiés sont coloriés.

Les forêts d'arbres enracinés sont exactement les arbustes sans sommet ramifié.

## 1.2 Quelques lemmes

**Lemme 1.1** *Soit  $P$  un arbuste. Soient  $a$  et  $a'$  deux éléments de même hauteur de  $P$ . Si il existe un élément  $b$  et deux chemins*


$$a \leftarrow \cdots \leftarrow b \rightarrow \cdots \rightarrow a', \quad (1)$$

*alors il existe un élément  $b'$  et deux arêtes*

$$a \leftarrow b' \rightarrow a'. \quad (2)$$

**Preuve.** Par récurrence sur la hauteur de  $b$ . Si  $b$  est de hauteur  $h_P(a) + 1$ , il n'y a rien à démontrer. Sinon, on a des éléments  $c, d, e$  et deux chemins

$$a \leftarrow \dots \leftarrow c \leftarrow b \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow \dots \rightarrow a', \quad (3)$$

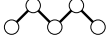
où  $e$  peut éventuellement se confondre avec  $a'$ . On utilise alors le motif exclu  sur les sommets  $\{b, c, d, e\}$  pour montrer qu'il existe une arête  $c \rightarrow e$ , donc un chemin de  $c$  à  $a'$ . Comme la hauteur de  $c$  est strictement inférieure à celle de  $b$ , on conclut ensuite par hypothèse de récurrence. ■

**Lemme 1.2** *Soit  $P$  un arbuste. Soient  $a$  et  $a'$  deux éléments de hauteur nulle de  $P$ . On suppose qu'il existe des éléments de hauteur nulle  $a = a_0, \dots, a_\ell = a'$ , des éléments  $b_i$  de hauteur 1 pour  $0 \leq i \leq \ell - 1$  et des arêtes*

$$a_i \leftarrow b_i \rightarrow a_{i+1}. \quad (4)$$

*Alors il existe un élément  $c$  de hauteur 1 et des arêtes*

$$a \leftarrow c \rightarrow a'. \quad (5)$$

**Preuve.** Par récurrence sur  $\ell$ . Si  $\ell = 1$ , il n'y a rien à démontrer. Sinon on utilise le motif exclu  sur les éléments  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1$ . On en déduit soit qu'il existe une arête de  $b_0$  vers  $a_2$ , soit qu'il existe une arête de  $b_1$  vers  $a_0$ .

Dans tous les cas, on obtient, en supprimant  $a_1$  et  $b_0$  ou  $b_1$ , une suite plus courte satisfaisant les mêmes hypothèses. On conclut par récurrence. ■

**Lemme 1.3** *Soit  $P$  un arbuste connexe et non trivial sur l'ensemble  $I$ . Soient  $a$  et  $a'$  distincts de hauteur nulle dans  $P$ . Alors il existe  $b$  couvrant  $a$  et  $a'$ .*

**Preuve.** Soient  $a$  et  $a'$  de hauteur nulle. Par connexité de  $P$ , on peut trouver une suite d'arêtes reliant  $a$  et  $a'$ . Comme tout élément de hauteur non nulle est source d'au moins une arête sortante, on peut, quitte à prolonger cette suite d'arêtes, trouver des éléments de hauteur nulle  $a = a_0, \dots, a_\ell = a'$ , des éléments  $b_i$  pour  $0 \leq i \leq \ell - 1$  et des chemins

$$a_i \leftarrow \dots \leftarrow b_i \rightarrow \dots \rightarrow a_{i+1}. \quad (6)$$

Par le lemme 1.1, on peut trouver des éléments  $b'_i$  de hauteur 1 tels que

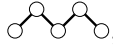
$$a_i \leftarrow b'_i \rightarrow a_{i+1}. \quad (7)$$

Par le lemme 1.2, il existe  $b$  couvrant  $a$  et  $a'$ . ■

**Proposition 1.4** *Soit  $P$  un arbuste connexe et non trivial sur l'ensemble  $I$ . Il existe dans  $P$  au moins un élément de hauteur 1 lié à tous les éléments de hauteur nulle.*

**Preuve.** Prenons  $e$  de hauteur 1 couvrant le plus possible d'éléments de hauteur nulle. Supposons qu'il existe  $a$  de hauteur nulle qui ne soit pas couvert par  $e$ .


Soit  $b$  un élément couvert par  $e$ . Soit  $d$  une couverture commune à  $a$  et  $b$ , qui existe par le lemme 1.3. Alors  $d$  diffère de  $e$  par hypothèse.

Soit  $c$  un élément couvert par  $e$  et différent de  $b$ , si il en existe. Considérons le graphe induit sur  $\{a, b, c, d, e\}$ . Par le motif exclu , ou bien  $e$  couvre  $a$ , ou bien  $d$  couvre  $c$ . Comme  $e$  ne couvre pas  $a$  par hypothèse, on a donc que  $d$  couvre  $c$ .

Qu'un tel  $c$  existe ou non, on a donc montré que  $d$  couvre tous les éléments couverts par  $e$  et aussi  $a$ , ce qui contredit la maximalité de  $e$ . Donc l'existence de  $a$  est absurde et  $e$  couvre tous les éléments de hauteur nulle. ■

**Proposition 1.5** *Soit  $P$  un arbuste connexe et non trivial sur l'ensemble  $I$ . Soit  $S$  l'ensemble des éléments de hauteur 1 couvrant tous les éléments de hauteur nulle. Dans le graphe obtenu en ôtant dans  $P$  toutes les arêtes entre  $S$  et les éléments de hauteur nulle, aucun sommet de  $S$  n'est dans la même composante connexe qu'un sommet de hauteur nulle.*

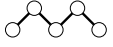
**Preuve.** Supposons le contraire. Soit  $P_{\geq 1}$  l'arbuste obtenu par troncation de  $P$  aux hauteurs non nulles. Il existe donc un élément  $a$  de  $S$  dont la composante connexe dans  $P_{\geq 1}$  contient un élément  $a'$  de  $h_P^{-1}(1) \setminus S$ . Par le lemme 1.3 appliqué à cette composante connexe, il existe  $b$  et des arêtes  $a \leftarrow b \rightarrow a'$ .


Par le motif exclu  appliqué dans  $P$  à  $a, b, a'$  et un élément  $c$  de hauteur nulle, on montre alors que  $a'$  couvre tous les éléments de hauteur nulle de  $P$ , donc appartient à  $S$ , ce qui est absurde. ■

On appelle **feuille** un sommet ayant une seule arête sortante et aucune arête entrante. On dit que deux sommets sont **corrélés** si ils ont le même ensemble de sources des arêtes entrantes et le même ensemble de buts des arêtes sortantes.

**Lemme 1.6** *Dans un arbuste non-trivial, il existe au moins une feuille ou deux sommets corrélés.*

**Preuve.** Supposons qu'il n'existe pas de feuille et montrons qu'il existe deux sommets corrélés. En effet, soit  $c$  un sommet de ramification minimale parmi les sommets de hauteur maximale. Par hypothèse,  $c$  n'est pas une feuille, donc est ramifié. Soient  $a$  et  $b$  deux sommets distincts couverts par  $c$ . Montrons que  $a$  et  $b$  sont corrélés.

Soit  $d$  un sommet de même hauteur que  $c$  qui couvre soit  $a$  soit  $b$ . Montrons que  $d$  couvre  $a$  et  $b$ . Supposons par exemple que  $d$  ne couvre pas  $a$  mais seulement  $b$ . Par minimalité de la ramification de  $c$ , il existe un sommet  $e$  qui est couvert par  $d$  mais pas couvert par  $c$ . On en déduit le motif  sur  $\{c, d, a, b, e\}$ , ce qui est absurde.

Par ailleurs, tout sommet  $e$  couvert par  $a$  ou  $b$  est en fait couvert par  $a$  et  $b$ , en raison du motif exclu  appliqué aux sommets  $\{c, a, b, e\}$ . ■

**Lemme 1.7** *Soit  $P$  un arbuste et  $i$  une feuille de  $P$ . Le graphe obtenu en supprimant le sommet  $i$  est un arbuste.*

**Preuve.** C'est clair. La fonction hauteur est inchangée sur les autres sommets. Les motifs exclus le sont toujours. ■

**Lemme 1.8** *Soit  $P$  un arbuste et  $i, j$  deux sommets corrélés de  $P$ . Le graphe obtenu en identifiant  $i$  et  $j$  est un arbuste.*

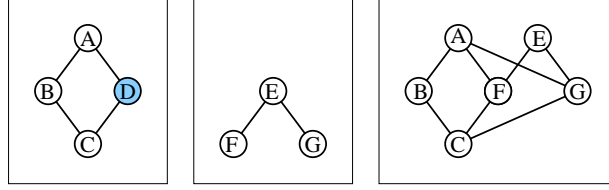


FIG. 2 – Composition de deux arbustes  $P$  et  $Q$  :  $P \circ_D Q$ .

**Preuve.** La fonction hauteur passe au quotient. Si un des motifs exclus apparaissait dans le graphe quotient, on pourrait le relever dans  $P$  en choisissant de relever en  $i$  le sommet obtenu par identification. ■

### 1.3 Bijection avec les posets série-parallèle

On peut construire par récurrence une bijection entre les arbustes et les posets Série-Parallèle, voir [Sta74, Sta99] pour cette notion. Plus précisément, il existe un isomorphisme entre l'espèce des arbustes et celle des posets Série-Parallèle, au sens de la théorie des espèces de structure de Joyal [BLL98]. On renvoie le lecteur à la note [Cha08] pour les détails de cette construction.

On peut noter qu'il existe aussi une structure d'opérade sur les posets Série-Parallèle, voir l'article [LR08] de Loday et Ronco.

## 2 L'opérade des arbustes

### 2.1 Définition

Dans cette section, on définit une structure d'opérade en se donnant des compositions partielles  $\circ_i$  sur les arbustes.

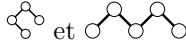
Soit  $P$  un arbuste sur  $I$ ,  $P'$  un arbuste sur  $I'$  et  $i \in I$ .

Définissons d'abord une fonction hauteur sur  $I \setminus \{i\} \sqcup I'$  :

$$h_{P \circ_i P'}(j) = \begin{cases} h_P(j) & \text{si } j \in I \setminus \{i\}, \\ h_{P'}(j) + h_P(i) & \text{si } j \in I'. \end{cases} \quad (8)$$

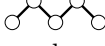
Définissons aussi un graphe  $P \circ_i P'$  sur  $I \setminus \{i\} \sqcup I'$  comme suit : dans l'union disjointe de  $P'$  et de  $P$  privé du sommet  $i$ , on relie par une arête tout sommet de  $P$  qui était relié à  $i$  à tout sommet de hauteur nulle de  $P'$ . La figure 2 montre un exemple de cette construction.

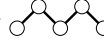
**Proposition 2.1** *Le graphe  $P \circ_i P'$  (muni de la hauteur  $h_{P \circ_i P'}$ ) est un arbuste.*

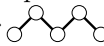
**Preuve.** Les conditions sur la hauteur sont clairement vérifiées. Il reste donc à vérifier que les motifs exclus  n'apparaissent pas.


**Remarque préliminaire** : supposons qu'un des deux motifs exclus soit présent dans  $P \circ_i P'$ . Nécessairement, comme le motif est exclu de  $P$  et de  $P'$ , une des arêtes du motif relie un élément de  $I \setminus \{i\}$  à un élément de  $I'$ . Si un seul sommet du motif est dans  $I'$ , alors on peut relever le motif dans  $P$  en

remplaçant ce sommet par  $i$ , ce qui est absurde. Donc, au moins deux sommets du motif sont dans  $I'$ .

Supposons d'abord qu'on ait le motif  avec  $a, b$  en haut et  $c, d, e$  en bas. Par la remarque ci-dessus, la hauteur de  $a$  et  $b$  est donc soit  $h_P(i)$  soit  $h_P(i) + 1$ .


Supposons d'abord que la hauteur de  $a$  et  $b$  est  $h_P(i)$ . Alors  $c, d, e$  sont dans  $I \setminus \{i\}$ . Par la remarque ci-dessus,  $a$  et  $b$  sont dans  $I'$ . Mais dans ce cas, les cinq sommets  $a, b, c, d, e$  ne peuvent pas former le motif , par construction de la composition.


Supposons ensuite que la hauteur de  $a$  et  $b$  est  $h_P(i) + 1$ . Si  $a$  est dans  $I'$ , alors  $c, d$  sont dans  $I'$  par construction. Mais dans ce cas,  $b$  est aussi dans  $I'$ , sinon, il y aurait une arête  $b-c$  par construction. Par conséquent  $a, b, c, d, e$  sont dans  $I'$  et  $P'$  contient le motif , ce qui est absurde. On montre de même que  $b \notin I'$ . On peut donc supposer que  $a$  et  $b$  sont dans  $I \setminus \{i\}$ . Nécessairement, on a alors que  $c$  et  $e$  sont dans  $I \setminus \{i\}$ . On aurait alors au plus un sommet dans  $I'$ , ce qui est impossible par la remarque.

Supposons maintenant qu'on ait le motif  avec  $a$  en haut,  $b, c$  au milieu et  $d$  en bas. Par la remarque, la hauteur de  $a$  est  $h_P(i)$ ,  $h_P(i) + 1$  ou  $h_P(i) + 2$ .

Si  $a \in I'$  est de hauteur  $h_P(i)$ , alors  $b, c, d$  sont dans  $I \setminus \{i\}$ , ce qui contredit la remarque.

Si  $a \in I'$  est de hauteur  $h_P(i) + 1$ , alors  $b, c$  sont dans  $I'$  et  $d$  est dans  $I \setminus \{i\}$ . Le motif est impossible par construction de la composition.

Si  $a \in I'$  est de hauteur  $h_P(i) + 2$ , alors  $b, c, d$  sont dans  $I'$ , ce qui est absurde car le motif  est exclu dans  $P'$ .

On a donc nécessairement  $a \in I \setminus \{i\}$ . Alors, par la remarque, la hauteur de  $a$  est  $h_P(i) + 1$ ,  $b, c$  sont dans  $I'$  et  $d$  dans  $I \setminus \{i\}$ . Mais alors le motif  est impossible par construction de la composition. ■

**Proposition 2.2** *Ces compositions définissent une opérade Arb.*

**Preuve.** L'arbuste trivial est clairement une unité pour la composition.

La composition est aussi clairement une application fonctorielle, qui ne dépend en aucune façon des étiquettes des sommets.

Il reste à vérifier les deux axiomes d'associativité des opérades.

Soient  $P, P'$  et  $P''$  des arbustes sur  $I, I'$  et  $I''$ . Soient  $i$  et  $j$  dans  $I$ . Si  $i$  et  $j$  ne sont pas reliés dans  $P$ , alors on a clairement

$$(P \circ_i P') \circ_j P'' = (P \circ_j P'') \circ_i P', \quad (9)$$

dans la mesure où la composition est locale dans  $P$ .

Si  $i$  et  $j$  sont reliés par une arête, cette relation est encore vraie, le résultat contenant un graphe bipartite complet entre les sommets de hauteur nulle de  $P'$  et ceux de  $P''$ .

Soient  $P, P'$  et  $P''$  des arbustes sur  $I, I'$  et  $I''$ . Soient  $i$  dans  $I$  et  $i'$  dans  $I'$ . Alors on a bien

$$(P \circ_i P') \circ_{i'} P'' = P \circ_i (P' \circ_{i'} P''). \quad (10)$$



En effet, la description du résultat est la même pour les deux expressions, en distinguant deux cas selon que  $i'$  est de hauteur nulle ou non dans  $P'$ .

Si la hauteur de  $i'$  dans  $P'$  est nulle, on relie tous les sommets de hauteur nulle de  $P''$  à tous les sommets reliés à  $i$  dans  $P$  et à tous les sommets reliés à  $i'$  dans  $P'$  et on relie tous les sommets de hauteur nulle de  $P'$  à tous les sommets liés à  $i$  dans  $P$ .

Si la hauteur de  $i'$  dans  $P'$  est non nulle, on relie tous les sommets de hauteur nulle de  $P''$  à tous les sommets liés à  $i'$  dans  $P'$  et on relie tous les sommets de hauteur nulle de  $P'$  à tous les sommets liés à  $i$  dans  $P$ . ■

On note  $[1][2]$  l'union disjointe de deux arbustes triviaux. L'opération correspondante  $(P, Q) \mapsto [1][2] \circ_1 P \circ_2 Q$  est juste l'union disjointe des arbustes. C'est un produit associatif et commutatif. On notera simplement  $PQ$  l'union disjointe de  $P$  et  $Q$ .

On note  $[1 \triangleleft 2]$  l'arbre enraciné sur l'ensemble  $\{1, 2\}$  ayant pour racine 1. L'opération correspondante  $(P, Q) \mapsto [1 \triangleleft 2] \circ_1 P \circ_2 Q$  est la suivante : on joint les éléments de hauteur 0 de  $P$  à ceux de hauteur 0 de  $Q$  par un graphe bipartite complet, et on ajoute 1 à la fonction hauteur de  $Q$ . Cette opération n'est pas associative. On la notera  $P \triangleleft Q$ .

**Remarque :** on a deux sous-opérades simples contenues dans Arb. Les arbres enracinés forment une copie de l'opérade NAP [Liv06]. Les forêts d'arbustes triviaux forment une copie de l'opérade Comm.

## 2.2 Présentation par générateurs et relations

**Théorème 2.3** *L'opérade Arb est engendrée par ses éléments  $[1][2]$  et  $[1 \triangleleft 2]$  de degré 2, soumis uniquement aux relations suivantes :*

$$[* \triangleleft 1] \circ_* [3 \triangleleft 2] = [* \triangleleft 2] \circ_* [3 \triangleleft 1] = [3 \triangleleft *] \circ_* [1][2] \quad (11)$$

et

$$[*][1] \circ_* [2][3] = [*][2] \circ_* [3][1]. \quad (12)$$

**Preuve.** Soit  $\mathbf{A}$  l'opérade quotient de l'opérade libre sur les générateurs  $C_{1,2} = C_{2,1}$  et  $D_{1,2}$  en degré 2 par l'idéal engendré par les relations obtenues en remplaçant  $[1][2]$  par  $C_{1,2}$  et  $[1 \triangleleft 2]$  par  $D_{1,2}$  dans les relations de l'énoncé.

Tout d'abord, les relations de l'énoncé sont faciles à vérifier dans Arb. On a donc un unique morphisme  $\phi$  de l'opérade  $\mathbf{A}$  dans Arb tel que  $\phi(C_{1,2}) = [1][2]$  et  $\phi(D_{1,2}) = [1 \triangleleft 2]$ . Il faut montrer que ce morphisme est un isomorphisme en construisant un inverse  $\psi$ .

On construit  $\psi$  par récurrence sur le degré  $n$ . On suppose par récurrence que  $\psi$  est l'inverse de  $\phi$  jusqu'en degré  $n - 1$ . Ceci entraîne en particulier que  $\psi$  est un morphisme d'opérade jusqu'en degré  $n - 1$ .

Soit  $P$  un arbuste de degré  $n \geq 2$ . Par le Lemme 1.6, il existe dans  $P$  une feuille ou une paire de sommets corrélés.

Si il existe une feuille  $i$ , on définit  $\psi$  de la façon suivante. Soit  $j$  l'unique sommet couvert par  $i$ . Soit  $P'$  l'arbuste obtenu à partir de  $P$  en supprimant le sommet  $i$  et en ré-étiquetant par le symbole  $\square$  le sommet  $j$ . Alors  $P$  peut s'écrire  $P' \circ_{\square} [j \triangleleft i]$ . On pose  $\psi(P) = \psi(P') \circ_{\square} D_{j,i}$ .

Si il existe deux sommets corrélés  $i$  et  $j$ , on définit  $\psi$  de la façon suivante. Soit  $P'$  l'arbuste obtenu à partir de  $P$  en identifiant les sommets  $i$  et  $j$  de  $P$

et en étiquetant le sommet ainsi défini par  $\square$ . L'arbuste  $P$  peut alors s'écrire  $P' \circ_{\square} [i][j]$ . On pose  $\psi(P) = \psi(P') \circ_{\square} C_{i,j}$ .

Il se peut bien entendu qu'il existe plusieurs feuilles, plusieurs paires de sommets corrélés ou qu'il existe à la fois une feuille et une paire de sommets corrélés dans  $P$ . Il faut montrer que la définition de  $\psi$  est bien cohérente, *i.e.* que nous avons bien ainsi défini une application  $\psi$ , indépendamment de tout choix. On va considérer successivement le cas de deux feuilles, le cas de deux paires et le cas d'une feuille et d'une paire, et deux sous-cas pour chacun de ces trois cas.

1) Soient  $i$  et  $i'$  deux feuilles. Si elles couvrent deux sommets distincts  $j$  et  $j'$ , alors il existe un arbuste  $P''$  tel que

$$P = (P'' \circ_* [j' \triangleleft i']) \circ_{\square} [j \triangleleft i] = (P'' \circ_{\square} [j \triangleleft i]) \circ_* [j' \triangleleft i']. \quad (13)$$

On obtient  $P''$  en supprimant  $i$  et  $i'$  dans  $P$  et en ré-étiquetant  $j$  par  $\square$  et  $j'$  par  $*$ .

Dans ce cas, les deux définitions possibles de  $\psi$  coïncident :

$$\begin{aligned} \psi(P'' \circ_* [j' \triangleleft i']) \circ_{\square} D_{j,i} &= (\psi(P'') \circ_* D_{j',i'}) \circ_{\square} D_{j,i} \\ &= (\psi(P'') \circ_{\square} D_{j,i}) \circ_* D_{j',i'} \\ &= \psi(P'' \circ_{\square} [j \triangleleft i]) \circ_* D_{j',i'}, \end{aligned} \quad (14)$$

par hypothèse de récurrence et en utilisant l'axiome de commutativité des opérades.

Si les deux feuilles  $i$  et  $i'$  couvrent le même sommet  $j$ , alors il existe un arbuste  $P''$  tel que

$$P = P'' \circ_{\square} ([* \triangleleft i]) \circ_* [j \triangleleft i'] = P'' \circ_{\square} ([* \triangleleft i'] \circ_* [j \triangleleft i]). \quad (15)$$

On obtient  $P''$  en supprimant  $i$  et  $i'$  dans  $P$  et en ré-étiquetant  $j$  par  $\square$ .

Dans ce cas, les deux définitions possibles de  $\psi$  coïncident :

$$\begin{aligned} \psi(P'' \circ_{\square} [* \triangleleft i]) \circ_* D_{j,i'} &= (\psi(P'') \circ_{\square} D_{*,i}) \circ_* D_{j,i'} = \psi(P'') \circ_{\square} (D_{*,i} \circ_* D_{j,i'}) \\ &= \psi(P'') \circ_{\square} (D_{*,i'} \circ_* D_{j,i}) = (\psi(P'') \circ_{\square} D_{*,i'}) \circ_* D_{j,i} \\ &= \psi(P'' \circ_{\square} [* \triangleleft i']) \circ_* D_{j,i}, \end{aligned} \quad (16)$$

par la partie gauche de la relation (11).

2) Soient  $i, j$  et  $i', j'$  deux paires de sommets corrélés, tous distincts. Alors il existe un arbuste  $P''$  tel que

$$P = (P'' \circ_* [i'][j']) \circ_{\square} [i][j] = (P'' \circ_{\square} [i][j]) \circ_* [i'][j']. \quad (17)$$

On obtient  $P''$  en identifiant  $i$  et  $j$  d'une part et  $i'$  et  $j'$  d'autre part dans  $P$  et en étiquetant ces sommets par  $\square$  et  $*$ .

Dans ce cas, les deux définitions possibles de  $\psi$  coïncident :

$$\begin{aligned} \psi(P'' \circ_* [i'][j']) \circ_{\square} C_{i,j} &= (\psi(P'') \circ_* C_{i',j'}) \circ_{\square} C_{i,j} \\ &= (\psi(P'') \circ_{\square} C_{i,j}) \circ_* C_{i',j'} \\ &= \psi(P'' \circ_{\square} [i][j]) \circ_* C_{i',j'}, \end{aligned} \quad (18)$$

par hypothèse de récurrence et en utilisant l'axiome de commutativité des opérades.

Si  $i, j$  et  $j, k$  sont deux paires de sommets corrélés, alors il existe un arbuste  $P''$  tel que

$$P = P'' \circ_{\square} ([*][i] \circ_* [j][k]) = P'' \circ_{\square} ([*][k] \circ_* [j][i]). \quad (19)$$

On obtient  $P''$  en identifiant les trois sommets  $i, j, k$  dans  $P$  et en étiquetant ce sommet par  $\square$ .

Dans ce cas, les deux définitions possibles de  $\psi$  coïncident :

$$\begin{aligned} \psi(P'' \circ_{\square} [*][i]) \circ_* C_{j,k} &= (\psi(P'') \circ_{\square} C_{*,i}) \circ_* C_{j,k} = \psi(P'') \circ_{\square} (C_{*,i} \circ_* C_{j,k}) \\ &= \psi(P'') \circ_{\square} (C_{*,k} \circ_* C_{j,i}) = (\psi(P'') \circ_{\square} C_{*,k}) \circ_* C_{j,i} \\ &= \psi(P'' \circ_{\square} [*][k]) \circ_* C_{j,i}, \end{aligned} \quad (20)$$

par la relation (12).

3) Soit enfin  $i$  une feuille et  $j, k$  des sommets corrélés. Si  $i$  est distincte de  $j$  et de  $k$ , alors  $i$  couvre un sommet  $\ell$  distinct de  $j$  et de  $k$  et il existe  $P''$  tel que

$$P = (P'' \circ_* [j][k]) \circ_{\square} [\ell \triangleleft i] = (P'' \circ_{\square} [\ell \triangleleft i]) \circ_* [j][k]. \quad (21)$$

On obtient  $P''$  en supprimant  $i$  et en identifiant  $j$  et  $k$  dans  $P$ , puis en ré-étiquetant  $\ell$  par  $\square$  et en étiquetant le sommet provenant de  $j, k$  par  $*$ .

Dans ce cas, les deux définitions possibles de  $\psi$  coïncident :

$$\begin{aligned} \psi(P'' \circ_* [j][k]) \circ_{\square} D_{\ell,i} &= (\psi(P'') \circ_* C_{j,k}) \circ_{\square} D_{\ell,i} \\ &= (\psi(P'') \circ_{\square} D_{\ell,i}) \circ_* C_{j,k} \\ &= \psi(P'' \circ_{\square} [\ell \triangleleft i]) \circ_* C_{j,k}, \end{aligned} \quad (22)$$

par l'axiome de commutativité des opérades.

Si  $i = j$ , alors  $k$  est aussi une feuille, les sommets  $i$  et  $k$  couvrent un sommet  $\ell$  et il existe un arbuste  $P''$  tel que

$$P = (P'' \circ_{\square} [\ell \triangleleft *]) \circ_* [i][k] = (P'' \circ_{\square} [* \triangleleft i]) \circ_* [\ell \triangleleft k]. \quad (23)$$

On obtient  $P''$  en supprimant  $j$  et  $k$  dans  $P$  et en ré-étiquetant le sommet  $\ell$  par  $\square$ .

Dans ce cas, les deux définitions possibles de  $\psi$  coïncident :

$$\begin{aligned} \psi(P'' \circ_{\square} [\ell \triangleleft *]) \circ_* C_{i,k} &= (\psi(P'') \circ_{\square} D_{\ell,*}) \circ_* C_{i,k} = \psi(P'') \circ_{\square} (D_{\ell,*} \circ_* C_{i,k}) \\ &= \psi(P'') \circ_{\square} (D_{*,i} \circ_* D_{\ell,k}) = (\psi(P'') \circ_{\square} D_{*,i}) \circ_* D_{\ell,k} \\ &= \psi(P'' \circ_{\square} [* \triangleleft i]) \circ_* [\ell \triangleleft k], \end{aligned} \quad (24)$$

par la partie droite de la relation (11).

Ceci termine de montrer que l'on a bien défini une application  $\psi$ .

Montrons maintenant que  $\psi$  et  $\phi$  sont bien inverses l'un de l'autre.

Comme  $\phi$  est un morphisme d'opérade, on a clairement  $\phi \circ \psi = Id$  par hypothèse de récurrence.

Considérons une expression monomiale  $R$  de degré  $n$  dans l'opérade  $\mathbf{A}$ .

Supposons d'abord qu'elle s'écrive  $R = R' \circ_i D_{1,2}$ . Alors  $\phi(R) = \phi(R') \circ_i [1 \triangleleft 2]$ . Donc 2 est une feuille de  $\phi(R)$ , qui couvre 1. En choisissant cette feuille pour calculer  $\psi$ , on trouve

$$\psi(\phi(R)) = \psi(\phi(R') \circ_i [1 \triangleleft 2]) = \psi(\phi(R')) \circ_i D_{1,2} = R' \circ_i D_{1,2} = R. \quad (25)$$

Sinon, on peut écrire  $R = R' \circ_i C_{1,2}$ . Alors  $\phi(R) = \phi(R') \circ_i [1][2]$ . Donc  $\phi(R)$  possède deux sommets corrélés : 1, 2. En choisissant ces sommets corrélés pour calculer  $\psi$ , on trouve

$$\psi(\phi(R)) = \psi(\phi(R') \circ_i [1][2]) = \psi(\phi(R')) \circ_i C_{1,2} = R' \circ_i C_{1,2} = R. \quad (26)$$

Donc les applications  $\phi$  et  $\psi$  sont inverses l'une de l'autre en degré  $n$ . Ceci conclut la récurrence.  $\blacksquare$

### 3 Morphismes injectifs

#### 3.1 Morphisme vers l'opérade Zinb

Soit  $P$  un arbuste sur un ensemble  $I$ . On dit qu'un ordre total  $<$  sur  $I$  est **compatible** avec  $P$  si il satisfait la condition suivante :

$$\forall i \in I \quad \exists j \in I \quad j \xleftarrow{P} i \text{ and } j < i, \quad (27)$$

où la notation  $j \xleftarrow{P} i$  signifie que  $i$  couvre  $j$  dans  $P$ .

Autrement dit, chaque sommet  $i$  doit être supérieur pour l'ordre  $<$  à au moins un des sommets  $j$  qu'il couvre dans  $P$ .

Si  $P$  est non-ramifié, la condition (27) décrit simplement l'ordre partiel associé à une forêt d'arbres enracinés et les ordres totaux compatibles avec  $P$  sont les extensions linéaires de cet ordre partiel.

On rappelle brièvement la définition de l'opérade Zinb, voir [Lod01]. Si  $I$  est un ensemble fini,  $\text{Zinb}(I)$  est l'espace vectoriel de base les ordres totaux sur  $I$ . On va considérer un ordre total comme une liste, avec le minimum à gauche.

Soit  $\pi \in \text{Zinb}(I)$  et  $\sigma \in \text{Zinb}(I')$  deux listes. On note  $\leq_\pi$  et  $\leq_\sigma$  les ordres totaux correspondants sur  $I$  et sur  $I'$ . La composition de  $\sigma$  dans  $\pi$  en position  $i \in I$  est une somme sur les battages de  $\sigma$  avec  $\pi$  tels que  $\sigma$  reste à droite de  $i$ . Plus précisément, soit  $\prec$  l'ordre partiel sur  $I \setminus \{i\} \sqcup I'$  défini par

$$a \preceq b \text{ si } \begin{cases} a, b \in I \text{ et } a \leq_\pi b \\ \text{ou } a, b \in I' \text{ et } a \leq_\sigma b \\ \text{ou } a \in I, b \in I' \text{ et } a \leq_\pi i. \end{cases} \quad (28)$$

Alors la composition  $\pi \circ_i \sigma$  dans  $\text{Zinb}(I \setminus \{i\} \sqcup I')$  est la somme des ordres totaux qui étendent l'ordre partiel  $\preceq$ .

**Proposition 3.1** *Il existe un unique morphisme d'opérades  $\gamma$  de Arb dans Zinb tel que*

$$\gamma([2 \triangleleft 1]) = [21], \quad (29)$$

$$\gamma([1][2]) = [12] + [21]. \quad (30)$$

**Preuve.** Il suffit de vérifier que les relations (11) et (12) sont satisfaites par les images dans Zinb, ce qui est immédiat. ■

Le morphisme  $\gamma$  admet la description suivante.

**Proposition 3.2** *Pour tout arbuste  $P$ ,  $\gamma(P)$  est la somme des ordres totaux sur  $I$  qui sont compatibles avec  $P$ .*

**Preuve.** Comme Arb est engendrée par ses éléments de degré 2, il suffit de montrer par récurrence que c'est vrai pour  $[1][2] \circ_1 P \circ_2 Q$  et pour  $[1 \triangleleft 2] \circ_1 P \circ_2 Q$  si c'est vrai pour  $P$  et pour  $Q$ .

L'arbuste  $[1][2] \circ_1 P \circ_2 Q$  est simplement l'union disjointe de  $P$  et  $Q$ . Les ordres compatibles avec l'union disjointe sont exactement les battages d'un ordre  $\pi$  compatible avec  $P$  et d'un ordre  $\sigma$  compatible avec  $Q$ . Or  $([12] + [21]) \circ_1 \pi \circ_2 \sigma$  dans Zinb est exactement la somme des battages des deux listes  $\pi$  et  $\sigma$ . On en déduit que la proposition est vérifiée pour l'union disjointe de  $P$  et  $Q$ .

Il reste à considérer le cas de  $[1 \triangleleft 2] \circ_1 P \circ_2 Q$ . C'est l'arbuste obtenu en reliant tous les sommets de hauteur nulle de  $P$  à tous les sommets de hauteur nulle dans  $Q$  et en ajoutant 1 à la fonction hauteur de  $Q$ . En termes d'ordres compatibles, ceci signifie que l'on a les mêmes relations entre les sommets de  $P$  que pour un ordre compatible avec  $P$ , les mêmes relations entre les sommets de  $Q$  que pour un ordre compatible avec  $Q$  et la condition supplémentaire suivante : pour tout sommet de hauteur nulle  $i$  de  $Q$ , il existe un sommet  $j$  de hauteur nulle de  $P$  tel que  $j < i$ . Les ordres compatibles sont donc les battages d'un ordre  $\pi$  compatible pour  $P$  avec un ordre  $\sigma$  compatible pour  $Q$  tels que le minimum est un élément de  $P$ . Or l'opération  $[21] \circ_1 \pi \circ_2 \sigma$  dans Zinb est exactement la somme des battages des deux listes  $\pi$  et  $\sigma$  tels que le minimum provient de  $\pi$ . ■

### 3.2 Morphisme vers l'opérade des moules

Commençons par rappeler la définition de l'opérade Mould des moules, voir [Cha07, CHNT08] pour plus de détails.

Si  $I$  est un ensemble fini,  $\text{Mould}(I)$  est le corps des fractions rationnelles en des indéterminées  $(u_i)_{i \in I}$ .

La composition d'une fraction  $g$  dans  $\text{Mould}(J)$  dans une fraction  $f \in \text{Mould}(I)$  en position  $i \in I$  est donnée par la formule suivante :

$$f \circ_i g = \left( \sum_{j \in J} u_j \right) \times g \times f|_{u_i = \sum_{j \in J} u_j}. \quad (31)$$

Dans cette formule,  $g$  est appliquée aux variables  $u_j$  pour  $j \in J$ , et on remplace dans les arguments de  $f$  la variable  $u_i$  par la somme indiquée.

On a une inclusion de Zinb dans Mould (voir [CHNT08]) qui est donnée par l'application suivante : un ordre total  $\pi$  sur  $I$  est envoyé sur la fraction

$$\frac{1}{\prod_{i \in I} \sum_{j \geq_\pi i} u_j}. \quad (32)$$

**Remarque :** on voit assez facilement que l'image dans Mould d'un élément de Zinb permet de calculer cet élément en utilisant des résidus itérés. Ceci entraîne l'injectivité.

En composant le morphisme  $\gamma$  de Arb dans Zinb avec cette inclusion de Zinb dans Mould, on obtient un morphisme  $\kappa$  de Arb dans Mould, qui est caractérisé comme suit.

**Proposition 3.3** *Il existe un unique morphisme d'opérades  $\kappa$  de Arb dans Mould tel que*

$$\kappa([2 \triangleleft 1]) = \frac{1}{u_1(u_1 + u_2)}, \quad (33)$$

$$\kappa([1][2]) = \frac{1}{u_1 u_2}. \quad (34)$$

**Lemme 3.4** *Soient  $Q$  et  $R$  deux arbustes. On a  $\kappa(Q R) = \kappa(Q)\kappa(R)$  et*

$$\kappa(Q \triangleleft R) = \kappa(Q)\kappa(R) \frac{\sum_{i \in Q} u_i}{\sum_{i \in Q \sqcup R} u_i}. \quad (35)$$

**Preuve.** Ceci résulte du fait que  $\kappa$  est un morphisme d'opérade. ■

On va donner maintenant une description directe du morphisme  $\kappa$ . On a besoin pour cela de quelques notations.

Deux sommets ramifiés  $i$  et  $i'$  d'un arbuste  $P$  sont dits **équivalents** si les ensembles des buts des arêtes sortantes de  $i$  et de  $i'$  sont identiques. On note  $\text{Ram}(P)$  l'ensemble des classes d'équivalence de sommets ramifiés d'un arbuste  $P$ . Dans la figure 1, on a colorié les sommets ramifiés avec une couleur commune par classe d'équivalence. Si  $r \in \text{Ram}(P)$  est une classe d'équivalence, on note  $r^-$  l'ensemble commun des buts des arêtes sortantes de  $r$ .

Une partie  $J$  de  $P$  est un **idéal supérieur** si le complémentaire de  $J$  dans  $P$  est un arbuste, pour la restriction de la fonction hauteur.

Soit  $S$  une partie d'un arbuste  $P$ . Il existe un idéal supérieur minimal contenant  $S$ , noté  $J_P(S)$  et nommé l'idéal supérieur engendré par  $S$  dans  $P$ . C'est la partie de  $I$  formée des éléments  $j$  tels que : tout chemin dans  $P$  qui descend de  $j$  vers un sommet de hauteur 0 passe par un élément de  $S$ . Ceci revient à dire que, pour tout ordre total  $\leq$  compatible avec  $P$ , il existe  $i$  dans  $S$  tel que  $j \geq i$ .

Pour une partie  $S$  de  $I$ , notons  $u[S]$  la somme des  $u_k$  pour  $k \in S$ .

Soit  $P$  un arbuste. Définissons une fraction  $f_P$  par la formule

$$f_P = \frac{1}{\prod_{i \in I} u[J_P(\{i\})]} \prod_{r \in \text{Ram}(P)} \frac{u[J_{P \setminus J_P(r)}(r^-)]}{u[J_P(r^-)]}. \quad (36)$$

**Proposition 3.5** *Pour tout arbuste  $P$ , la fraction  $f_P$  est réduite, sans multiplicité, et produit de facteurs linéaires.*

**Preuve.** En effet, si on compare les facteurs de  $f_P$  selon l'ensemble des sommets de hauteur minimale qu'ils contiennent (qui est soit un singleton  $i$  soit de la forme  $r^-$  avec  $r \in \text{Ram}(P)$ ), les seules coïncidences possibles sont entre les deux facteurs (un dans le numérateur et un dans le dénominateur) associés à un même  $r \in \text{Ram}(P)$ , et ces deux facteurs sont distincts, car chaque élément de  $J_P(r)$  est dans l'une et pas dans l'autre. ■

Par exemple, en abrégant  $u_A$  en  $A$ ,  $u_B$  en  $B$ , etc, la fraction associée à l'arbuste de droite de la figure 2 est la suivante :

$$\frac{(B + E + F + G)(F + G)}{A B E F G (A + B + C + E + F + G)(A + B + E + F + G)(E + F + G)}. \quad (37)$$

Dans ce cas, on a deux classes de sommets ramifiés :  $\{A\}$  et  $\{E\}$ .

**Proposition 3.6** *Le morphisme  $\kappa$  de Arb dans Mould est donné par  $\kappa(P) = f_P$ .*

**Preuve.** Par récurrence. L'énoncé est vrai en degré 1. Soit donc  $P$  un arbuste à  $n$  sommets avec  $n \geq 2$ .

Supposons d'abord  $P$  non connexe. Alors  $P$  s'écrit comme union disjointe d'arbres connexes. Chaque  $r$  dans  $\text{Ram}(P)$  est contenu dans un composante connexe, l'ensemble  $r^-$  est dans la même composante, et l'idéal supérieur engendré par une partie contenue dans une composante connexe est contenu dans cette composante connexe. La formule pour  $f_P$  est donc clairement le produit des formules sur les composantes connexes. Comme  $\kappa$  est aussi multiplicatif par le Lemme 3.4, on en déduit par hypothèse de récurrence le résultat voulu pour  $P$ .

Supposons maintenant  $P$  connexe. Alors  $P$  s'écrit  $Q \triangleleft R$ , pour deux arbustes  $Q$  et  $R$ . Si  $P$  a un seul sommet de hauteur nulle, on peut et on va supposer que  $Q$  est réduit à ce sommet.

Considérons d'abord l'idéal supérieur  $J_P(\{j\})$  engendré par un singleton  $\{j\}$  dans  $P$ . Si  $j$  est dans  $R$ , alors  $J_P(\{j\})$  s'identifie à  $J_R(\{j\})$ , car tous les sommets au dessus de  $j$  sont dans  $R$ . Si  $j$  est dans  $Q$ , on distingue deux cas. Si  $j$  est le seul sommet de hauteur nulle de  $P$ , alors  $Q$  est un singleton,  $J_P(\{j\}) = P$ , et  $J_Q(\{j\}) = Q = \{j\}$ . Sinon, il existe  $i \neq j$  de hauteur nulle dans  $P$ , ce qui entraîne pour tout sommet de  $R$  l'existence d'un chemin vers  $i$  et évitant  $j$ . Donc aucun sommet de  $R$  ne peut appartenir à  $J_P(\{j\})$ . Par conséquent, on a  $J_P(\{j\}) = J_Q(\{j\})$ .

Considérons ensuite les facteurs de  $f_P$  associés aux sommets ramifiés. Il y a une inclusion de  $\text{Ram}(Q) \sqcup \text{Ram}(R) \subset \text{Ram}(P)$ . On voit aisément que, pour chaque  $r$  dans  $\text{Ram}(R) \subset \text{Ram}(P)$ , la contribution de  $r$  à la fraction  $f_P$  est identique à la contribution de  $r$  à la fraction  $f_R$ .

On va distinguer selon qu'il y a un ou plusieurs sommets de hauteur 0 dans  $P$ .

Supposons d'abord qu'il y a un seul sommet de hauteur 0 dans  $P$ . Alors  $Q$  est un singleton et on a  $\text{Ram}(P) = \text{Ram}(R)$ .

Supposons maintenant qu'il y a plusieurs sommets de hauteur 0 dans  $P$ . Dans ce cas, on a  $\text{Ram}(P) = \text{Ram}(Q) \sqcup \text{Ram}(R) \sqcup \{r_0\}$ , où  $r_0$  est l'ensemble des sommets de hauteur 0 dans  $R$ . On voit aisément que, pour chaque  $r$  dans  $\text{Ram}(Q) \subset \text{Ram}(P)$ , la contribution de  $r$  à la fraction  $f_P$  est identique à la contribution de  $r$  à la fraction  $f_Q$ . La partie  $r_0^-$  est l'ensemble des sommets de hauteur nulle de  $P$ . L'idéal supérieur engendré par  $r_0^-$  est donc  $P$ . Le facteur associé à  $r_0$  dans  $f_P$  est  $\frac{u[Q]}{u[P]}$ .

Dans tous les cas considérés, on obtient donc que

$$f_{Q \triangleleft R} = f_Q f_R \frac{u[Q]}{u[P]}. \quad (38)$$

ce qui démontre que  $f_P = \kappa(P)$ , en utilisant le Lemme 3.4. ■

### 3.3 Injectivité des morphismes

**Les composantes connexes des fractions** On montre dans ce paragraphe qu'on peut reconstituer la partition de  $I$  en composantes connexes de  $P$  à partir de la fraction  $f_P$ .

**Lemme 3.7** *Soit  $P$  un arbuste connexe. Le dénominateur de  $f_P$  contient le facteur  $\sum_{i \in I} u_i$ .*

**Preuve.** Si  $P$  a un seul sommet  $i$  de hauteur nulle, l'idéal supérieur engendré par  $i$  est  $I$ . Le terme correspondant au sommet  $i$  dans le dénominateur est donc  $\sum_{i \in I} u_i$ .

Si  $P$  a plusieurs sommets de hauteur nulle, il existe des sommets de hauteur 1 couvrant tous ces sommets par la proposition 1.4. Ces sommets sont ramifiés et équivalents. Le terme correspondant à cette classe d'équivalence de sommets ramifiés dans le dénominateur est  $\sum_{i \in I} u_i$ . ■

Soit  $f$  une fraction en les variables  $(u_i)_{i \in I}$ . On définit une partition  $\pi_f$  de  $I$  comme suit :  $i$  et  $j$  sont dans la même part de  $\pi_f$  si il existe un facteur du dénominateur de  $f$  qui fait intervenir à la fois  $u_i$  et  $u_j$ .

**Lemme 3.8** *Soit  $P$  un arbuste sur  $I$ . Les composantes connexes de  $P$  sont les parts de  $\pi_{f_P}$ .*

**Preuve.** Soit  $\pi_P$  la partition de  $I$  formée par les composantes de  $P$ . Si  $P$  n'est pas connexe, la fraction  $f_P$  est le produit des fractions associées aux composantes connexes de  $P$ . En particulier, le dénominateur se factorise selon les parts de  $\pi_P$ . Donc  $\pi_{f_P}$  est un raffinement de  $\pi_P$ . Réciproquement, par le lemme précédent,  $\pi_P$  est un raffinement de  $\pi_{f_P}$ . ■

**De la fraction à la fonction hauteur** On montre dans ce paragraphe qu'on peut reconstruire la partition de  $I$  selon la hauteur à partir de la fraction  $f_P$ .

On remarque d'abord que, comme l'opérade  $\text{Zinb}$  s'injecte dans  $\text{Mould}$ , on peut reconstituer à partir de la fraction  $f_P$  l'ensemble des ordres totaux compatibles avec  $P$ . On va utiliser cet ensemble pour reconstruire la partition selon la hauteur.

**Lemme 3.9** *Les éléments de  $I$  de hauteur 0 dans  $P$  sont exactement ceux qui peuvent apparaître comme minimum dans un ordre total compatible avec  $P$ .*

**Preuve.** Si  $i$  n'est pas de hauteur nulle et  $\leq$  est un ordre total compatible, alors il existe au moins un  $j$  tel que  $j < i$ , donc  $i$  n'est pas minimal. Réciproquement, si  $i$  est de hauteur nulle, on peut toujours trouver un ordre compatible avec  $P$  ayant  $i$  pour minimum, par exemple en ordonnant les sommets par hauteur croissante, puis arbitrairement à hauteur fixée. ■

**Proposition 3.10** *On peut reconstruire à partir de  $f_P$  la partition en hauteur de  $I$  associée à  $P$ .*



**Preuve.** On commence par retrouver l'ensemble des ordres totaux compatibles avec  $P$ . On en déduit les sommets de hauteur 0 par le Lemme 3.9. En supprimant ces sommets dans les ordres totaux, on obtient l'ensemble des ordres totaux compatibles avec l'arbuste obtenu par restriction de  $P$  à la hauteur au moins 1. On en déduit les sommets de hauteur 1 par le Lemme 3.9. On procède ainsi de suite par hauteur croissante, en éliminant les sommets dont la hauteur est déjà identifiée. ■

**De la fraction à l'arbuste** On montre enfin dans ce paragraphe qu'on peut reconstituer entièrement l'arbuste  $P$  à partir de la fraction  $f_P$ .

**Proposition 3.11** *Le morphisme  $\gamma$  de Arb dans Zinb est injectif, ainsi que le morphisme composé  $\kappa$  de Arb dans Mould.*

**Preuve.** Il suffit de montrer que le morphisme  $\kappa$  de Arb dans Mould est injectif. Il faut donc montrer comment reconstruire un arbuste  $P$  à partir de sa fraction  $f_P$ . On donne un algorithme pour ceci, par récurrence.

La fraction  $1/u_1 \in \text{Mould}(\{1\})$  correspond évidemment au seul arbuste sur  $\{1\}$ .

Étape 1 : on sait reconnaître les composantes connexes par le Lemme 3.8 : les composantes connexes d'un arbuste  $P$  sont exactement celles du dénominateur de la fraction  $f_P$ . On obtient par factorisation les fractions associées aux composantes connexes.

Étape 2 : on peut donc supposer la fraction  $f$  connexe. Elle contient donc la somme de toutes les variables en dénominateur. On sait aussi reconstruire la fonction hauteur, par la Proposition 3.10.

On distingue ensuite deux cas.

**Cas 1** : il y a un seul sommet  $i$  de hauteur nulle.

Dans ce cas,  $P$  s'écrit comme  $\{i\} \triangleleft Q$  et la fraction  $f_P$  est égale à  $f_Q \times \frac{1}{u[Q]+u_i}$  par le Lemme 3.4. On en déduit  $f_Q$ . On reconstitue alors  $Q$  par récurrence et on obtient donc  $P$ .

**Cas 2** : il y a plusieurs sommets de hauteur nulle.

Alors il existe un élément  $r \in \text{Ram}(P)$  correspondant aux élément de hauteur 1 qui couvrent tous les élément de hauteur 0. Dans  $f_P$ , le facteur  $\alpha_r$  correspondant du numérateur est le seul qui contienne tous les éléments de hauteur nulle. Dans cette situation,  $P$  s'écrit  $Q \triangleleft R$  où les sommets de  $R$  sont exactement ceux qui n'apparaissent pas dans le facteur  $\alpha_r$ . En utilisant la formule

$$f_{Q \triangleleft R} = f_Q f_R \frac{u[Q]}{u[P]}, \quad (39)$$

et en séparant les facteurs selon que leurs variables sont dans  $R$  ou non, on obtient les fractions  $f_Q$  et  $f_R$ . On reconstitue  $Q$  et  $R$  par récurrence, donc  $P$  aussi. ■

## 4 Structure anticyclique

L'opérade Mould est munie de la structure plus riche d'opérade anticyclique [Cha07, CHNT08]. Ceci signifie qu'il existe sur  $\text{Mould}(\{1, \dots, n\})$  une action du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_{n+1}$  qui étend l'action du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  et

satisfait à certaines relations avec les compositions de l'opérade Mould. L'action du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_{n+1}$  sur  $\text{Mould}(\{1, \dots, n\})$  est donnée comme suit. On introduit une variable supplémentaire  $u_0$  vérifiant  $u_0 + u_1 + \dots + u_n = 0$ . Le groupe  $\mathfrak{S}_{n+1}$  agit par permutations des variables  $u_0, \dots, u_n$ . Toute fraction obtenue ainsi peut s'écrire de façon unique comme une fraction en les variables  $u_1, \dots, u_n$ , en éliminant  $u_0$ .

L'opérade Zinb est alors une sous-opérade anticyclique de Mould, ce qui signifie que  $\text{Zinb}(\{1, \dots, n\})$  est stable par l'action de  $\mathfrak{S}_{n+1}$ .

Pour pouvoir parler d'opérade anticyclique ensembliste, on a besoin de signes, car les axiomes font intervenir des signes. On définit donc une opérade  $\text{Arb} \times \mathbb{Z}/2$  en introduisant un signe  $+1$  ou  $-1$  pour chaque arbuste et en prolongeant les compositions en multipliant les signes.

On peut alors prolonger de manière unique les morphismes injectifs d'opérades ensemblistes  $\gamma$  et  $\kappa$  de  $\text{Arb}$  dans  $\text{Zinb}$  et  $\text{Mould}$  en morphismes de  $\text{Arb} \times \mathbb{Z}/2$  dans  $\text{Zinb}$  et  $\text{Mould}$  qui envoient  $-x$  sur  $-\gamma(x)$  et  $-\kappa(x)$  pour tout  $x$ . On vérifie facilement que ces morphismes restent injectifs.

**Proposition 4.1** *La sous opérade ensembliste  $\text{Arb} \times \mathbb{Z}/2$  est une sous-opérade ensembliste anticyclique de Zinb et Mould.*

**Preuve.** Comme  $\text{Arb} \times \mathbb{Z}/2$  est engendrée en degré 2, il suffit de vérifier que les images des générateurs de  $\text{Arb} \times \mathbb{Z}/2$  dans  $\text{Mould}$  sont bien stables sous l'action du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_3$ , ce qui est facile. ■

Par conséquent, il existe une action du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_{n+1}$  sur les arbustes signés sur l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ , pour tout  $n \geq 1$ . On appellera cette action l'**action anticyclique**.

Dans la figure 1, on a groupé ensemble les classes d'isomorphisme (*i.e.* les orbites pour l'action de  $\mathfrak{S}_n$ ) d'arbustes connexes qui sont (au signe près) dans la même orbite pour  $\mathfrak{S}_{n+1}$ . Dans chacune de ces orbites pour  $\mathfrak{S}_{n+1}$ , il peut y avoir aussi des arbustes non connexes, qui ne sont pas représentés dans la figure 1.

**Proposition 4.2** *L'action anticyclique sur les arbustes signés préserve le nombre de classes d'équivalence de sommets ramifiés.*

**Preuve.** Par définition de son action sur les fractions, elle préserve le degré du numérateur de  $f_P$ , ce qui entraîne le résultat. ■

**Remarque :** pour distinguer les orbites de cette action, on dispose d'un invariant plus fin que le degré du numérateur de  $f_P$ . Cet invariant est une paire de multi-ensembles d'entiers compris entre 1 et  $(n+1)/2$ . Pour cela, on spécialise les variables  $u_i$  en 1. Chaque facteur du numérateur et du dénominateur de  $f_P$  donne un nombre. On a donc un multi-ensemble pour le numérateur et un autre pour le dénominateur. On remplace dans ces multi-ensembles un nombre  $k$  par  $n+1-k$  si il est plus grand que  $(n+1)/2$ . La paire de multi-ensembles ainsi obtenue est alors invariante pour l'action du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_{n+1}$ .

## 4.1 Action sur les forêts d'arbres enracinés

Par la proposition 4.2, on obtient en particulier une action du groupe symétrique  $\mathfrak{S}_{n+1}$  sur les forêts signées d'arbres enracinés sur l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ , car les forêts sont exactement les arbustes sans sommets ramifiés.

Dans cette section, on va décrire cette action.

Si  $F$  est une forêt formée des arbres enracinés  $T_1, \dots, T_k$ , on note  $B_+(j, F)$  ou  $B_+(j, T_1, \dots, T_k)$  l'arbre enraciné obtenu en greffant les racines des arbres composant  $F$  sur une nouvelle racine commune  $j$ . Si  $T$  est un arbre enraciné, on note  $B_-(T)$  la forêt obtenue en supprimant la racine de  $T$ .

**Lemme 4.3** *Soit  $F$  une forêt formée des arbres enracinés  $T_1, \dots, T_k$ . Soit  $i$  la racine de  $T_1$ . Alors, pour l'action anticyclique, on a*

$$\tau_{0,i}F = -B_-(T_1) \sqcup B_+(i, T_2, \dots, T_k), \quad (40)$$

où  $\tau_{0,i}$  est la transposition de 0 et  $i$ .

**Preuve.** Dans la fraction  $f_F$ , le sommet  $i$  apparaît seulement dans le facteur correspondant à  $T_1$  tout entier. En échangeant  $i$  et 0, et en éliminant  $u_0$  par la relation  $\sum_{j=0}^n u_j = 0$ , on obtient la fraction

$$-f_F \times \frac{\sum_{j \in T_1} u_j}{u_i + \sum_{j \notin T_1} u_j}. \quad (41)$$

Cette fraction correspond (avec un signe moins) à la forêt  $B_-(T_1) \sqcup B_+(i, T_2, \dots, T_k)$ . ■

On note l'ensemble  $C(n+1)$  des arbres enracinés signés sur l'ensemble  $\{0, 1, \dots, n\}$  modulo la relation suivante : Si  $(T, r)$  est un arbre enraciné en  $r$  et  $r'$  un sommet adjacent à  $r$  alors

$$(T, r) = -(T, r'). \quad (42)$$

Le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_{n+1}$  agit naturellement sur  $C(n+1)$ . On remarque, en utilisant la simple connexité des arbres, que chaque élément de  $C(n+1)$  admet un unique représentant enraciné en 0. Le cardinal de  $C(n+1)$  est donc  $2(n+1)^{n-1}$ .

On définit alors une application  $B_0$  de l'ensemble des forêts signées dans  $C(n+1)$  comme suit :  $B_0(F) = B_+(0, F)$  et  $B_0(-F) = -B_0(F)$ . C'est une bijection, qui respecte les actions du groupe  $\mathfrak{S}_n$ .

**Proposition 4.4** *L'application  $B_0$  est compatible avec les actions de  $\mathfrak{S}_{n+1}$  sur les forêts signées d'arbres enracinés et sur  $C(n+1)$ .*

**Preuve.** Il suffit de considérer les transpositions  $\tau_{0,i}$  avec  $i \in \{1, \dots, n\}$ . On procède par récurrence sur la distance entre 0 et  $i$  dans l'arbre  $B(0, F)$ .

Si cette distance vaut 1,  $i$  est la racine d'un des arbres composant  $F$ . Si on fait agir la transposition  $\tau_{0,i}$  sur  $B(0, F)$ , on obtient un arbre enraciné en le sommet  $i$ , voisin du sommet 0. Par la relation (42), on change sa racine pour la ramener en 0 en introduisant un signe moins. Le résultat est

$$-B(0, B_-(T_1) \sqcup B(i, T_2, \dots, T_k)), \quad (43)$$

qui est bien  $B_0(\tau_{0,i}(F))$  par le lemme 4.3.

Si la distance entre 0 et  $i$  est au moins 2, soit  $0, i_1, i_2, \dots, i_\ell, i$  l'unique chemin entre 0 et  $i$  dans  $B(0, F)$ . Dans ce cas, on a

$$\tau_{0,i} = \tau_{i,i_1} \tau_{0,i} \tau_{0,i_1}. \quad (44)$$

Par le cas précédent (distance 1), on a donc

$$\tau_{0,i}B_0(F) = \tau_{i,i_1}\tau_{0,i}B_0(\tau_{0,i_1}F). \quad (45)$$

Mais la distance dans  $\tau_{0,i_1}F$  entre 0 et  $i$  est moindre que dans  $F$ , donc par hypothèse de récurrence, on a

$$\tau_{0,i}B_0(F) = \tau_{i,i_1}B_0(\tau_{0,i}\tau_{0,i_1}F). \quad (46)$$

Comme  $B_0$  est compatible avec l'action de  $\mathfrak{S}_n$ , on en déduit le résultat voulu. ■

## 4.2 Une déformation du morphisme de Arb dans Mould

A titre de remarque, on décrit ici des morphismes d'opérade anticyclique des arbustes dans les moules, qui généralisent celui utilisé dans le reste de l'article.

Soit  $t(u)$  une fonction rationnelle d'une variable  $u$ .

**Proposition 4.5** *La fonction*

$$\frac{t(u_1)t(u_2)}{u_1u_2t(u_1+u_2)} \quad (47)$$

*définit un élément commutatif et associatif dans Mould(2), donc un morphisme  $\kappa_t$  de Comm dans Mould.*

**Preuve.** La preuve est une simple vérification de l'associativité. ■

**Proposition 4.6** *Il existe une unique extension du morphisme  $\kappa_t$  en un morphisme d'opérade anticyclique  $\kappa_t$  de Arb dans Mould.*

**Preuve.** Pour montrer cela, il suffit de vérifier que les images des générateurs de Arb, qui sont imposées par la structure anticyclique, vérifient la relation (11). ■

Le cas  $t(u) = 1$  est celui étudié dans le reste de l'article.

## 5 L'opérade duale

En partant de la présentation quadratique binaire de l'opérade Arb donnée par le théorème 2.3, on peut calculer (par la procédure habituelle, voir par exemple [Lod01, Appendix B]) une présentation de l'opérade quadratique binaire duale  $\text{Arb}^!$ . On va décrire les algèbres sur cette opérade, ce qui équivaut à décrire la présentation.

Une algèbre sur l'opérade duale  $\text{Arb}^!$  est donnée par un crochet  $[\cdot, \cdot]$  antisymétrique et un produit  $*$  (non commutatif), vérifiant les axiomes suivants :

$$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0, \quad (48)$$

$$[a, b] * c = 0, \quad (49)$$

$$a * (b * c) = 0, \quad (50)$$

$$[a * b, c] = 0, \quad (51)$$

$$a * [b, c] = (a * b) * c - (a * c) * b. \quad (52)$$

On remarque que le crochet est un crochet de Lie par (48), et que le produit  $*$  n'est pas associatif, mais définit un module à droite pour le crochet de Lie par (52).

Les  $\text{Arb}^!$ -algèbres libres ont une description simple. En termes d'opérades, ceci s'exprime comme suit.

**Proposition 5.1** *On a*

$$\text{Arb}^!(n) = \begin{cases} \text{Ass}(1) & \text{si } n = 1, \\ \text{Lie}(n) \oplus \text{Ass}(n) & \text{si } n \geq 2, \end{cases} \quad (53)$$

où  $\text{Lie}(n) = \text{Lie}(\{1, \dots, n\})$  et  $\text{Ass}(n) = \text{Ass}(\{1, \dots, n\})$  sont les composantes des opérades classiques Lie et Ass.

**Preuve.** C'est une conséquence facile de la présentation. ■

L'opérade  $\text{Arb}^!$  hérite par dualité d'une structure anticyclique provenant de celle de  $\text{Arb}$ . Ceci donne une notion de forme antisymétrique invariante  $\langle, \rangle$  pour les algèbres sur  $\text{Arb}^!$ . La condition d'invariance est la suivante :

$$\langle a * b, c \rangle = -\langle [b, c], a \rangle. \quad (54)$$

## Références

- [BLL98] F. Bergeron, G. Labelle, and P. Leroux. *Combinatorial species and tree-like structures*, volume 67 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. Translated from the 1994 French original by Margaret Readdy, With a foreword by Gian-Carlo Rota.
- [Cha05] F. Chapoton. On some anticyclic operads. *Algebr. Geom. Topol.*, 5 :53–69 (electronic), 2005.
- [Cha07] F. Chapoton. The anticyclic operad of moulds. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (20) :Art. ID rnm078, 36, 2007.
- [Cha08] Frédéric Chapoton. A bijection between shrubs and series-parallel posets. In *20th Annual International Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (FPSAC 2008)*, DMTCS Proceedings, 2008.
- [CHNT08] Frédéric Chapoton, Florent Hivert, Jean-Christophe Novelli, and Jean-Yves Thibon. An operational calculus for the mould operad. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (9) :Art. ID rnn018, 22, 2008.
- [Liv06] Muriel Livernet. A rigidity theorem for pre-Lie algebras. *J. Pure Appl. Algebra*, 207(1) :1–18, 2006.
- [Lod01] Jean-Louis Loday. Dialgebras. In *Dialgebras and related operads*, volume 1763 of *Lecture Notes in Math.*, pages 7–66. Springer, Berlin, 2001.
- [LR08] Jean-Louis Loday and Maria O. Ronco. Combinatorial Hopf algebras, 2008.

- [Sta74] Richard P. Stanley. Enumeration of posets generated by disjoint unions and ordinal sums. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 45 :295–299, 1974.
- [Sta99] Richard P. Stanley. *Enumerative combinatorics. Vol. 2*, volume 62 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. With a foreword by Gian-Carlo Rota and appendix 1 by Sergey Fomin.